

No.5 行列のランク

この回のゴール

- 行列のランクを定義でき、行基本変形で求められる。
- ランクが「実質的に意味のある行の本数」を表していることを説明できる。
- 文字を含む行列のランクを場合分けして求められる。
- 「正則 $\iff$ ランクが $n \iff$ 簡約階段行列が E 」を説明できる。

■ 1. 見かけの行数と実質の行数

次の連立方程式を考えよう。

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 4y + 6z = 2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

2 本目の式は 1 本目をちょうど 2 倍しただけなので、新しい情報を何も含んでいない。式は 3 本あるように見えるが、**実質的には 2 本**である。

この「実質的な本数」を、係数の行列から読み取る道具がランクである。行基本変形をすると、余分な行は零行として浮かび上がる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2}-\textcircled{1} \times 2, \textcircled{3}-\textcircled{1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\textcircled{2} \leftrightarrow \textcircled{3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

零行でない行が 2 本残った。

■ 2. ランクの定義

定義 1 ランク

行列 A を行基本変形によって簡約階段行列に変形したとき、**零行でない行の個数**を A の**ランク**（階数）といい、 $\text{rank } A$ と書く。

注意

- 簡約階段行列は変形のやり方によらず 1 つに決まる (No.4 定理 2)。だから「零行でない行の個数」も 1 つに決まり、ランクはきちんと定義されている。
- 実際の計算では、**簡約まで進めなくても階段行列で止めてよい**。階段行列から簡約階段行列へ進める変形（主成分を 1 にする、主成分の上を掃き出す）では、零行でない行の個数は変わらないからである。
- 零行でない行の個数 = 主成分の個数、と言ってもよい。

例 1

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2, \quad \text{rank} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 1, \quad \text{rank } E_n = n, \quad \text{rank } O = 0.$$

2 つめは、② - ① $\times \frac{1}{2}$ で第 2 行が零行になる。

定理 1 ランクの基本的な性質

A を $m \times n$ 行列とする。

- (1) $\text{rank } A \leq m$ かつ $\text{rank } A \leq n$.
- (2) 行基本変形で行列のランクは変わらない。

【証明】(1) 零行でない行の個数は全体の行数 m 以下。また、主成分は各列に高々 1 つしかない（主成分は下の行ほど真に右にずれる）ので、主成分の個数は列数 n 以下。

(2) A に行基本変形をして B になったとする。 B をさらに変形して簡約階段行列 R にすれば、 A も（途中で B を経由して） R に変形されたことになる。簡約階段行列はただ 1 つなので、 A と B の簡約階段行列はどちらも R 。よってランクは等しい。□

コラム：列から見てもランクは同じ

実は $\text{rank } {}^tA = \text{rank } A$ が成り立つ。つまり「実質的な行の本数」と「実質的な列の本数」は必ず一致する。これは見た目ほど当たり前ではなく、第 5 章の次元定理などを通じて理解できる。今の段階では、ランクは行基本変形でも列基本変形でも変わらない、と覚えておけばよい。

■ 3. 文字を含む行列のランク

文字を含む行列では、「0 で割っていないか」に気をつけながら変形し、必要なら場合分けをする。

例題 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ のランクを求めよ.}$$

【解答】

$$A \xrightarrow{\text{②}-\text{①}, \text{③}-\text{①} \times a} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{③}+\text{②}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 \end{pmatrix}.$$

ここで $2-a-a^2 = -(a-1)(a+2)$ である。

(i) $a = 1$ のとき：第 2 行、第 3 行がともに零行になり、 $\text{rank } A = 1$ 。

(ii) $a \neq 1$ のとき：第 2 行を $\frac{1}{a-1}$ 倍してよく、第 2 行は $(0, 1, -1)$ 。第 3 行は $(0, 0, -(a-1)(a+2))$ で、

- $a = -2$ なら零行になり、 $\text{rank } A = 2$ 。
- $a \neq -2$ なら零行でなく、 $\text{rank } A = 3$ 。

まとめると,

$$\text{rank } A = \begin{cases} 1 & (a = 1) \\ 2 & (a = -2) \\ 3 & (a \neq 1, -2) \end{cases}$$

注意

「第2行を $\frac{1}{a-1}$ 倍する」のは $a \neq 1$ のときしかできない. a を含む式で割るときは, 割る前に必ず「それが0になる場合」を別に考える.

■ 4. ランクと正則性

No.4 で「 $(A | E)$ を変形して左半分に零行が出たら A は正則でない」と予告した. その理由がここで分かる.

定理 2 正則性の判定

n 次正方行列 A について, 次の3つは同値である.

- (a) A は正則である.
- (b) $\text{rank } A = n$.
- (c) A の簡約階段行列は単位行列 E_n である.

【証明】 (b) $\Rightarrow$ (c) : $\text{rank } A = n$ なら, $n \times n$ の簡約階段行列 R に主成分が n 個ある. 主成分は各行に1つ, しかも下の行ほど真に右にあるので, 第 i 行の主成分は第 i 列にしかありえない. 主成分は1で, その列の他の成分は0なので $R = E_n$.

(c) $\Rightarrow$ (b) : $\text{rank } E_n = n$ から明らか.

(c) $\Rightarrow$ (a) : A を E に変形する行基本変形を $(A | E)$ に行えば $(E | X)$ の形になるので, No.4 定理3より A は正則.

(a) $\Rightarrow$ (c) : A が正則で, 簡約階段行列 R が E でないとする. R の主成分は n 個未満なので, 最後の行は零行である. $R = PA$ (P は基本行列の積で正則) と書けるので, R は正則行列の積として正則である. ところが, 最後の行が零行の行列 R にどんな行列 X を掛けても, RX の最後の行は零行で, $RX = E$ にはならない. 矛盾. $\square$

定理2からすぐに次のことが分かる.

定理 3

- (1) 正則行列は, 基本行列の積で書ける.
- (2) P が m 次正則行列, A が $m \times n$ 行列なら, $\text{rank}(PA) = \text{rank } A$.

【証明】 (1) A が正則なら, 定理2より行基本変形で E に変形できる. 対応する基本行列を $P_1, \dots, P_k$ とすると $P_k \cdots P_1 A = E$ なので

$$A = (P_k \cdots P_1)^{-1} = P_1^{-1} \cdots P_k^{-1}.$$

基本行列の逆行列は基本行列 (No.4 定理1) なので, これは基本行列の積である.

(2) (1) より PA は A に行基本変形を何回か行ったものなので, 定理1(2)より $\text{rank}(PA) = \text{rank } A$. $\square$

使い方

正方行列が正則かどうかは、**行基本変形で階段行列にして、零行が出るかどうか**を見れば判定できる。逆行列を求める計算をされていて途中で零行が出たら、そこで「正則でない」と結論してよい。

例 2

例題 1 の $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ は、 $\text{rank } A = 3$ となる $a \neq 1, -2$ のときに限り正則である。

■ 練習問題

1. 次の行列のランクを求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ のランクを求めよ。また、第 3 行が第 1 行と第 2 行を使ってどう表せるかを見つけ、ランクの値と結びつけて説明せよ。

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & k \end{pmatrix}$ のランクを求めよ。また、 A が正則となる k の条件を答えよ。

4. 次の行列が正則かどうかを、ランクを用いて判定せよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

5. $c \neq 0$ のとき、 $\text{rank}(cA) = \text{rank } A$ を示せ。

6. (考えてみよう) 3×5 行列 A のランクとしてありうる値をすべて答えよ。また、 $\text{rank } A = 3$ となる 3×5 行列の例と、 $\text{rank } A = 1$ となる例を 1 つずつ挙げよ。

■ 練習問題の解答

1. (1) ② - ① × 3 で $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. ランク 2.

(2)

$$\xrightarrow{\text{②}-\text{①} \times 2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{③} + \text{②}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ランク 2.

- (3) ② - ① × 2, ③ - ① × 3, ④ - ① を行くと, 第 2~4 行がすべて $(0, 3, -3, 3)$ になる. さらに ③ - ②, ④ - ② で第 3, 4 行が零行になる.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よってランク 2.

2. ② - ① × 4, ③ - ① × 7 で第 2 行 $(0, -3, -6)$, 第 3 行 $(0, -6, -12)$. ③ - ② × 2 で第 3 行が零行. ランク 2.

実際, (第 3 行) = 2 × (第 2 行) - (第 1 行) が成り立つ: $2(4, 5, 6) - (1, 2, 3) = (7, 8, 9)$. 第 3 行は第 1 行・第 2 行から作れるので新しい情報をもたず, 実質的な行は 2 本である.

3. ② - ①, ③ - ① で $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & k-1 \end{pmatrix}$, ③ - ② × 2 で第 3 行は $(0, 0, k-5)$. よって $k=5$ のとき

$\text{rank } A = 2$, $k \neq 5$ のとき $\text{rank } A = 3$. A が正則 $\iff \text{rank } A = 3 \iff k \neq 5$.

4. (1) 第 1 節の計算よりランク $2 < 3$ なので正則でない. (2) No.4 例題 2 で E まで変形できた (簡約階段行列が E) ので, ランク 3 で正則.

5. cA は, A の各行に「 c 倍」という行基本変形 ($c \neq 0$) を行ったものなので, 定理 1 (2) よりランクは変わらない.

6. 定理 1 (1) より $\text{rank } A \leq 3$ なので, ありうる値は 0, 1, 2, 3. 例えば

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3, \quad \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$